



Задание 19

Числа и их свойства

Числа и их свойства

1. Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100.

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 90?

б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 88?

в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

2. За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. В турнире принимают участие m мальчиков и d девочек, причём каждый играет с каждым дважды.

а) Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если $m = 3$, $d = 2$.

б) Какова сумма набранных всеми участниками очков, если $m + d = 10$.

в) Каковы все возможные значения d , если $m = 7d$ и известно, что в сумме мальчики набрали ровно в 3 раза больше очков, чем девочки?

3. Каждое из чисел 2, 3, ..., 7 умножают на каждое из чисел 13, 14, ..., 21 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

4. Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел, удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 18x - 20y - 166, \\ 32x - y^2 > x^2 + 12y + 271. \end{cases}$$

5. Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел, удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 24x - 28y + 167 < 0, \\ x + 2y < \frac{15}{2}. \end{cases}$$

6. Винтики можно разложить в пакетики, а пакетики упаковать в коробки, по 3 пакетика в одну коробку. Можно эти же винтики разложить в пакетики так, что в каждом пакете будет на 3 винтика больше, чем раньше, но тогда в каждой коробке будет лежать по 2 пакетика, а коробок потребуется на 2 больше. Какое наибольшее число винтиков может быть при таких условиях?

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{25};$$

7. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{25}$, где $m > n$.

8. В игре «Дротики» есть 20 наружных секторов, пронумерованных от 1 до 20 и два центральных сектора. При попадании в наружный сектор игрок получает количество очков, совпадающее с номером сектора, а за попадание в центральный сектора он получает 25 или 50 очков соответственно. В каждом из наружных секторов есть области удвоения и утроения, которые, соответственно, удваивают или утраивают номинал сектора. Так, например, попадание в сектор 10 (не в зоны удвоения и утроения) дает 10 очков, в зону удвоения сектора — 20 очков, в зону утроения — 30 очков.

а) Может ли игрок тремя бросками набрать ровно 167 очков?

б) Может ли игрок шестью бросками набрать ровно 356 очков?

в) С помощью какого наименьшего количества бросков, игрок может набрать ровно 1001 очко?

9. В игре «Дротики» есть 20 наружных секторов, пронумерованных от 1 до 20 и два центральных сектора. При попадании в наружный сектор игрок получает количество очков, совпадающее с номером сектора, а за попадание в центральный сектора он получает 25 или 50 очков соответственно. В каждом из наружных секторов есть области удвоения и утроения, которые, соответственно, удваивают или утраивают номинал сектора. Так, например, попадание в сектор 10 (не в зоны удвоения и утроения) дает 10 очков, в зону удвоения сектора — 20 очков, в зону утроения — 30 очков.

а) Может ли игрок тремя бросками набрать ровно 161 очко?

б) Может ли игрок четырьмя бросками набрать ровно 235 очков?

в) С помощью какого наименьшего количества бросков, игрок может набрать ровно 947 очков?

10. Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 16?

б) Каково наибольшее значение n , если сумма всех данных чисел меньше 900?

в) Найдите все возможные значения n , если сумма всех данных чисел равна 235.

11. Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 13?

б) Каково наибольшее значение n , если сумма всех данных чисел меньше 500?

в) Найдите все возможные значение n , если сумма всех данных чисел равна 57.

12. Найдите все простые числа p , для каждого из которых существует такое целое число k , что число p является общим делителем чисел $k^4 + 12k^2 + 12$ и $k^3 + 9k$.

13. Найдите все простые числа b , для каждого из которых существует такое целое число a , что дробь $\frac{a^4 + 16a^2 + 7}{a^3 + 15a}$ можно сократить на b .

14. На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3 , среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8 .

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

15. Найдутся ли хотя бы три десятизначных числа, делящиеся на 11, в записи каждого из которых использованы все цифры от 0 до 9?

16. Ученик должен перемножить два трехзначных числа и разделить их произведение на пятизначное. Однако он не заметил знака умножения и принял два записанных рядом трехзначных числа за одно шестизначное. Поэтому полученное частное (натуральное) оказалось в 3 раза больше истинного. Найдите все три числа.

Числовые наборы на карточках и досках

1. Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n , выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n , а остальные числа, равные n , стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8, 10.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 8, 10, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 25, 26, 31, 33, 34, 41.

2. Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор $-11, -7, -5, -4, -1, 2, 6$. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 4 раза. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

3. На доске написано число 7. Раз в минуту Вася дописывает на доску одно число: либо вдвое большее какого-то из чисел на доске, либо равное сумме каких-то двух чисел, написанных на доске (таким образом, через одну минуту на доске появится второе число, через две — третье и т.д.).

а) Может ли в какой-то момент на доске оказаться число 2012?

б) Может ли в какой-то момент сумма всех чисел на доске равняться 63?

в) Через какое наименьшее время на доске может появиться число 784?

4. Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел 1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел 1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

5. На доске написано более 27, но менее 45 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -5 , среднее арифметическое всех положительных из них равно 9, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -18 .

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Последовательности и прогрессии

1. Все члены геометрической прогрессии — различные натуральные числа, заключенные между числами 510 и 740.

а) может ли такая прогрессия состоять из четырех членов?

б) может ли такая прогрессия состоять из пяти членов?

2. Дана последовательность натуральных чисел, причём каждый следующий член отличается от предыдущего либо на 12, либо в 8 раз. Сумма всех членов последовательности равна 437.

- а) Какое наименьшее число членов может быть в этой последовательности?
- б) Какое наибольшее количество членов может быть в этой последовательности?

3. Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).

- а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 10?
- б) Каково наибольшее значение n , если сумма всех данных чисел меньше 1000?
- в) Найдите все возможные значения n , если сумма всех данных чисел равна 129.

4. Перед каждым из чисел 14, 15, ..., 20 и 4, 5, ..., 8 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего от каждого из образовавшихся чисел первого набора отнимают каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 35 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

5. Каждое из чисел 5, 6, ..., 9 умножают на каждое из чисел 12, 13, ..., 17 и перед каждым произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 30 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю сумму и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Сюжетные задачи: кино, театр, мотки верёвки

1. Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{4}{13}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

- а) Могло ли быть в группе 10 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?
- б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?
- в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а) и б)?

2. Группу школьников нужно перевезти из летнего лагеря одним из двух способов: либо двумя автобусами типа А за несколько рейсов, либо тремя автобусами типа В за несколько рейсов, причем в этом случае число рейсов каждого автобуса типа В будет на один меньше, чем рейсов каждого автобуса типа А. В каждом из случаев автобусы заполняются полностью.

Какое максимальное количество школьников можно перевезти при указанных условиях, если в автобус типа В входит на 7 человек меньше, чем в автобус типа А?

3. Красный карандаш стоит 17 рублей, синий — 13 рублей. Нужно купить карандаши, имея всего 495 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше чем на пять.

- а) Можно ли купить при таких условиях 32 карандаша?
- б) Можно ли купить при таких условиях 35 карандашей?
- в) Какое наибольшее число карандашей можно купить при таких условиях?

4. Ученики одной школы писали тест. Результатом каждого ученика является целое неотрицательное число баллов. Ученик считается сдавшим тест, если он набрал не менее 83 баллов. Из-за того, что задания оказались слишком трудными, было принято решение всем участникам теста добавить по 5 баллов, благодаря чему количество сдавших тест увеличилось.

- а) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, не сдавших тест, понизился?
- б) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, сдавших тест, понизился, и средний балл участников, не сдавших тест, тоже понизился?
- в) Известно, что первоначально средний балл участников теста составил 90, средний балл участников, сдавших тест, составил 100, а средний балл участников, не сдавших тест, составил 75. После добавления баллов средний балл участников, сдавших тест, стал равен 103, а не сдавших — 79. При каком наименьшем числе участников теста возможна такая ситуация?

5. Ученики одной школы писали тест. Результатом каждого ученика является целое неотрицательное число баллов. Ученик считается сдавшим тест, если он набрал не менее 73 баллов. Из-за того, что задания оказались слишком трудными, было принято решение всем участникам теста добавить по 5 баллов, благодаря чему количество сдавших тест увеличилось.

- а) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, не сдавших тест, понизился?
- б) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, сдавших тест, понизился, и средний балл участников, не сдавших тест, тоже понизился?
- в) Известно, что первоначально средний балл участников теста составил 80, средний балл участников, сдавших тест, составил 90, а средний балл участни-

ков, не сдавших тест, составил 65. После добавления баллов средний балл участников, сдавших тест, стал равен 93, а не сдавших — 69. При каком наименьшем числе участников теста возможна такая ситуация?

6. Моток веревки режут без остатка на куски длиной не меньше 99 см, но не больше 102 см (назовем такие куски стандартными).

а) Некоторый моток веревки разрезали на 33 стандартных куска, среди которых есть куски разной длины. На какое наибольшее число стандартных одинаковых кусков можно было бы разрезать тот же моток веревки?

б) Найдите такое наименьшее число l , что любой моток веревки, длина которого больше l см, можно разрезать на стандартные куски.

7. Моток веревки режут без остатка на куски длиной не меньше 115 см, но не больше 120 см (назовем такие куски стандартными).

а) Некоторый моток веревки разрезали на 23 стандартных куска, среди которых есть куски разной длины. На какое наибольшее число стандартных одинаковых кусков можно было бы разрезать тот же моток веревки?

б) Найдите такое наименьшее число l , что любой моток веревки, длина которого больше l см, можно разрезать на стандартные куски.

8. Имеются каменные глыбы: 50 штук по 800 кг, 60 штук по 1 000 кг и 60 штук по 1 500 кг (раскалывать глыбы нельзя).

а) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 60 грузовиках, грузоподъемностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

б) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 38 грузовиках, грузоподъемностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

в) Какое наименьшее количество грузовиков, грузоподъемностью 5 тонн каждый, понадобится, чтобы вывезти все эти глыбы одновременно, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

— это 39.